9. Soustavy rovnic

Správný nadpis této kapitoly by měl znít „soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých“, z důvodu přehlednosti jsem jej zkrátil. Hned v úvodu čtenáře potěším – teorie bude tentokrát krátká. Vzhledem k tomu, že v sedmé kapitole jste si mohli velmi podrobně procvičit řešení všech možných lineárních rovnic o jedné neznámé, máme tímto téměř celou teorii hotovou. Jen upozornění – pokud neumíte řešit rovnice o jedné neznámé, nepouštějte se do této kapitoly, ale projděte nejdříve kapitolu o lineárních rovnících!

Definice soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých je:

- *Dvojice lineárních rovnic*, kde každá z rovnic obsahuje *dvě neznámé*. Obecně může být soustavou lineárních rovnic nazývána *n-tice* lineárních rovnic o *n* neznámých, v naší kapitole se ale budeme zabývat pouze soustavami tvořenými dvojicí rovnic o dvou neznámých.
- Rovnice v soustavě jsou *lineární – obě neznámé jsou v první mocnině.*

V důsledku toho, že budeme provádět pouze ekvivalentní úpravy rovnic, nemuseli bychom z matematického hlediska dělat zkoušku. V některých příkladech si ji však pro úplnost ukážeme (může být vyžadována v zadání).

Způsoby řešení

V matematice existuje mnoho způsobů, jak takovéto soustavy řešit. V této kapitole budou soustavy řešeny s využitím následujících metod:

- adiční – sčítací metoda
- substituční – dosazovací metoda
- komparační – porovnávací metoda
- grafická metoda

Protože čas jsou peníze, nebudu zde jednotlivé metody teoreticky popisovat, rovnou si je ukážeme „v akci“ v rámci řešených úloh. Poslední, tedy grafické metodě bude věnována samostatná podkapitola.

Upozornění – správnost výsledku nezávisí na použité metodě, jinými slovy, jakoukoli z uvedených metod musíme dojít ke správnému výsledku.

Obor pravdivosti soustavy rovnic o dvou neznámých

Při řešení soustav rovnic je moc dobré vědět, jak to celé může dopadnout. Proč je to důležité? Protože znalost všech možných situací na konci řešení vás zbaví zkratovitých tahů a škrtání správného řešení. Jak to tedy je?

Soustava dvou lineárních rovnic může mít:

- *právě jedno řešení* – tímto řešením je potom uspořádaná dvojice čísel, jedno číslo pro každou neznámou
- *žádné řešení* – situaci poznám podle toho, že nám v průběhu řešení vypadnou obě neznámé a zbyde nepravdivý číselný výrok $(0 = -3)$
- *nekonečně mnoho řešení* – situaci poznáme podle toho, že nám v průběhu řešení vypadnou obě neznámé a zbyde pravdivý číselný výrok $(0 = 0)$

9.1 Začínáme zlehka – jednodušší soustavy rovnic

Jednoduššími soustavami rovnic mám na mysli takové, ve kterých se nevyskytují nenáviděné zlomky, neznámé jsou pěkně srovnané pod sebou a nejsou ve jmenovateli, prostě pohoda.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1

Řešte soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ x-y&=0 \end{aligned}$$

Řešení

Tuto soustavu vyřešíme metodou, kterou jsem si oblíbil nejvíce – metodou adiční neboli sčítací. Principem této metody je upravit *jednu* nebo *obě rovnice* tak, aby po *sečtení rovnic* jedna z neznámých „vypadla“ a my dostali *jednu rovnici o jedné neznámé*.

Na tomto místě se přímo nabízí vynásobení druhé rovnice soustavy číslem 3:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ x-y&=0 \qquad /\cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 3x-3y&=0 \qquad /\text{rovnice sečteme} \end{aligned}$$

Po sečtení nám vzniká jedna rovnice o jedné neznámé. Důvodem je právě to, že jsme vhodně upravili druhou rovnici tak, aby po sečtení vypadla neznámá *y*.

$$\begin{aligned} 2x+3x+3y-3y&=5+0 \\ 5x&=5 \qquad /:5 \\ x&=1 \end{aligned}$$

Nyní máme jednu neznámou vypočtenou a můžeme počítat druhou. Jednoduše si vybereme jednu z rovnic v zadání (obvykle tu hezčí) a dosadíme za *x* vypočtenou hodnotu:

$$
\begin{aligned}
x - y &= 0 \qquad \text{/dosadíme za } x \text{ číslo 1} \\
1 - y &= 0 \\
-y &= -1 \qquad / \cdot (-1) \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

A je hotovo! Výsledek řešení soustavy rovnic může být zapsán dvěma základními způsoby:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

Nebo jako *uspořádaná dvojice čísel*:

$$[1;1]$$

Máme obě neznámé, a pokud si věříme, z principu zkoušku dělat nemusíme (prováděli jsme pouze ekvivalentní úpravy). Pokud ale budeme chtít, stačí pouze výsledky dosadit za neznámé do původních rovnic:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\
P_1 &= 5 \\
L_1 &= P_1 \\
L_2 &= 1 - 1 = 0 \\
P_2 &= 0 \\
L_2 &= P_2
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 2

Řešte soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= 5 \\
x - 2y &= 8
\end{aligned}
$$

Řešení

Na případě této soustavy si připomeneme metodu substituční, neboli dosazovací. *Principem této metody je vyjádřit si jednu neznámou pomocí druhé*, neboli vytvořit *substituci*. Tímto opět získávám jednu rovnici o jedné neznámé. Druhá rovnice soustavy se přímo nabízí k vytvoření substituce, a proto ji použijeme:

$$
\begin{aligned}
x - 2y &= 8 \qquad / + 2y \\
x &= 8 + 2y \qquad \text{/toto je naše substituce vyjádřená z druhé rovnice soustavy}
\end{aligned}
$$

Máme tedy vyjádřeno x pomocí y a toto nyní dosadíme do první rovnice:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= 5 \qquad \text{/dosadíme substituci } x = 8 + 2y \\
2(8 + 2y) - 3y &= 5
\end{aligned}
$$

Jak sami vidíte, získali jsme opět jedinou rovnici s jednou neznámou. Řešíme rovnici v *y*:

$$16+4y-3y=5$$
$$16+y=5 \qquad /-16$$
$$y=-11$$

Jednu neznámou máme hotovou, nyní stačí vypočítané *y* zpětně dosadit do substituce, kterou jsme na začátku řešení vyjádřili:

$$x=8+2y$$
$$x=8+2\cdot(-11)$$
$$x=8-22$$
$$x=-14$$

PŘÍKLAD 3

Řešte soustavu rovnic:

$$3x-4y=9$$
$$-x+2y=3$$

Řešení

Opět jedna jednoduchá, tentokrát se na ni ukážeme poslední, tak zvanou komparační (porovnávací) metodu. *Komparační metoda spočívá v tom, že položíme rovnost*:

$$x=x$$
nebo
$$y=y$$

V tomto případě navrhuji vyjádřit z obou rovnic proměnnou *x* a položit prvně uvedenou rovnost. Následuje vyjádření neznámé *x* z obou rovnic:

$$x=\frac{9+4y}{3} \qquad /\text{neznámá } x \text{ z první rovnice}$$
$$x=2y-3 \qquad /\text{neznámá } x \text{ z druhé rovnice}$$

Nyní položíme rovnost $x=x$ a opět získáváme jednu lineární rovnici o jedné neznámé, kterou řešíme v *y*:

$$\frac{9+4y}{3}=2y-3 \qquad /\cdot 3$$
$$9+4y=3\cdot(2y-3)$$
$$9+4y=6y-9 \qquad /-9;-6y$$
$$-2y=-18 \qquad /:(-2)$$
$$y=9$$

Neznámou y máme vypočtenoua dosadíme ji do některé z výchozích rovnic, v tomto případě to bude snadnější do druhé:

$$-x+2\cdot y=3 \quad \text{/dosadíme } y=9$$
$$-x+2\cdot 9=3$$
$$-x+18=3 \quad /-18$$
$$-x=-15 \quad /\cdot(-1)$$
$$x=15$$

PŘÍKLAD 4

Řešte soustavy rovnic:

a) $x+4y=6$
$2x+8y=12$

b) $2x+4y=6$
$x+2y=0$

Řešení a

Pro jednoduchost použijeme adiční metodu, tentokrát bez dalšího komentáře v průběhu řešení:

$$x+4y=6 \quad /\cdot(-2)$$
$$\underline{2x+8y=12}$$

$$-2x-8y=-12$$
$$\underline{2x+8y=12} \quad \text{/sečteme rovnice}$$

$$0=0$$

Takže pro jistotu ještě jednou – pokud v průběhu řešení vypadnu obě neznámé a zůstane pravdivý číselný výrok (v tomto případě $0=0$), značí to, že *tato soustava má nekonečně mnoho řešení*.

Řešení b

$$2x+4y=6$$
$$\underline{x+2y=0} \quad /\cdot(-2)$$

$$2x+4y=6$$
$$\underline{-2x-4y=0} \quad \text{/sečteme rovnice}$$

$$0=6$$

V tomto případě opět vypadly obě neznámé, zůstal však nepravdivý číselný výrok ($0=6$), z čehož plyne, že *tato soustava nemá řešení*.

CVIČENÍ

Poznámka: v rámci všech příkladů ve cvičení zvolte k řešení soustav libovolnou metodu.

1. Vypočtete soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

a) $2x - 3y = 16$
$3x + y = 2$

c) $-2x - 4y = -8$
$x + 2y = 4$

b) $3a + 2b = 12$
$a - 2b = 4$

d) $7t - 4s = 11$
$2s - 3t = 0$

e) $p - 2q = 6$
$3p - q = 12$

f) $2u - 2r = 4$
$u - r = 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $x = 2; y = -4;$ b) $x = 4; y = 0;$ c) nekonečně mnoho řešení;
d) $s = 16\frac{1}{2}; t = 11;$ e) $p = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}; q = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5};$ f) nemá řešení

. . . .

Kapitola má celkem 25 stran.

Na naší stránce naleznete také 2 bonusy k dané témě:

* excelovský soubor **Resitel_soustav** *(k univerzálnímu použití)*

* prezentace **Graficke_reseni** k části 9.3 *(viz cvičení níže)*

9.3 Grafické řešení soustavy rovnic

Uvádíme z dané kapitoly pouze cvičení, ke kterým se váže prezentace **Graficke_reseni**

CVIČENÍ

1. Řešte graficky soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých:

a) $y - x = -3$, $x = -y - 1$

b) $1 + y = 3x$, $y - 2x = 0$

c) $2x + y = 1$, $y - 2x = -1$

2. Řešte graficky soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých:

a) $0 = x - y + \frac{5}{2}$, $x = -y - \frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}x = \frac{3}{4} - y$, $y - 2 = 2x$

c) $\frac{1}{2}x = -(y+2)$, $\frac{5x}{2} + 2 = -y$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $[1;-2]$ b) $[1;2]$ c) $\left[\frac{1}{2};0\right]$

2. a) $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ c) $[0;-2]$